1. ***уроков по теме «Квадратные уравнения»***

 ***Урок №1***

***Цель урока:*** ввести понятие квадратного уравнения. Ознакомить учащихся с алгоритмом решения квадратного уравнения; ознакомить с применением теоремы Виета и теоремы, обратной ей.

***Ход урока:***

1. Устные упражнения
2. Представьте в виде многочлена выражение:

(х – 2)(2 + х); $(х-3)^{2} ; \left(у^{2}-у\right)∙у$

1. Равносильны ли уравнения:

3х – 2 = х = 3 и 2х – 5 = 0; 0,5х – 3 = 0 и х – 6 = 0

5х – 1 = 3х - $х^{2 }и х^{2}$ + 2х = 1; 5$х^{2}$ – 10х + 25 = 0 и $х^{2}$ – 2х + 5 = 0 ?

1. Решите уравнение:

У – 7 = 0; х + 0,5 = 0; 8х = 0;

2х - $\frac{1}{3}$ = 0; у + $√3$ = 0; а ( а – 1) = 0;

$х^{2}$ – 7х = 0; $х^{2}$ – 15 = 0.

1. Изучение нового материала
2. Составим уравнение с корнем х = 3.

|  |  |
| --- | --- |
| Сначала составим числовое тождество, например:Заменяя число 3 слева буквой х, превратим тождество в линейное:И равносильное ему уравнениеИтак, на основе тождества (1) получили линейное уравнение (3), которое имеет единственный кореньТеперь составим такое алгебраическое уравнение, которое имело бы два произвольно заданных корня $х\_{1}$и $х\_{2}$.Пусть это будут корни:1. Запишем условие в виде совокупности двух линейных уравнений с правыми частями, равными нулю.
2. Перемножим уравнение совокупности. Раскроем скобки в левой части и приведём подобные.
3. Мы получили квадратное уравнение. В квадратном уравнении старший член во второй степени. Выражение, записанное в левой части называют квадратным трёхчленом.
 | 3 = 3 (1)Х = 3 (2)Х – 3 = 0 (3)Х = 3$х\_{1}=3 и х\_{2. }$ = 5 (1).Х – 3 = 0, х – 5 = 0 (2)(х – 3)(х – 5) = 0$х^{2}$ – 3х – 5х +15 = 0$х^{2}$ – 8х + 15 = 0 |

Составленное нами квадратное уравнение

 $х^{2}$ – 8х + 5 = 0

Имеет два намеченных заранее корня:

$х\_{1}=3 и х\_{2}$ = 5. Чтобы проверить решения, значение корня подставим в обе части уравнения.

Проверка первого корня Проверка второго корня

 ($ х\_{1}$ = 3) ( $х\_{2}$ = 5 )

$х^{2}$ – 8х + 15 = 0 $х^{2}$ – 8х + 15 = 0

$3^{2}-8∙3+15$ ? 0 $5^{2}-8∙5$ + 15 ? 0

9 – 24 +15 ? 0 25 – 40 +15 ? 0

 0 = 0 0 = 0

Подставим в уравнение число, отличающее от найденных корней, например $х\_{3}$ = 2:

 $2^{2} $-8$∙$ 2 + 15 ? 0

 4 – 16 + 15 ? 0

 3 $\ne $ 0

Значит,$х\_{1 }=3 и х\_{2}$ = 5 – корни квадратного уравнения.

1. Составим алгоритм решения приведённого квадратного уравнения

 $х^{2}$ + рх + q = 0.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Решить квадратное уравнение:1. Перенесём свободный член в правую часть с противоположным знаком
2. Представим второй член в левой части как удвоенное произведение неизвестного х на некоторое число ( таким числом оказалось $\frac{8}{2}$ = 4 ):
3. Прибавим к обеим частям равенства по квадрату второго множителя ($4^{2}=\left( \frac{р}{2})^{2}\right):$
4. Представим левую часть как квадрат двучлена:
5. Извлечём из обеих частей квадратный корень:
6. Соответственно этим двум знакам получаем два корня квадратного уравнения:
 | $х^{2}$ – 8х + 15 = 0 (р = -8, q = 15 )$х^{2}$ – 8х = -15$х^{2}$ - 2$∙∙х=q$$х^{2}$ - 2$∙4∙х= -15$$х^{2}-2∙4∙х+ 4^{2}= -15+ 4^{2}$ ($х-4)^{2}= -15+ 4^{2}$$$\sqrt{(х-4)^{2}}= \sqrt{-15+4^{2}}$$Х – 4 = $\pm \sqrt{-15+4^{2}}$ $х\_{1}=4+ \sqrt{4^{2}-15};$ $х\_{2}=4- \sqrt{4^{2}-15}$.$х\_{1}=4+1=5$;$х\_{2}=4-1=3$. |  $х^{2}$ + рх + q = 0$х^{2}$ + рх = -q$х^{2}+2∙∙х= $-q$х^{2}$ + 2 $∙\frac{р}{2}∙х$ = -q$х^{2}+2∙\frac{р}{2}∙х+(\frac{р}{2})^{2}= -q+( \frac{р}{2})^{2} $( $х+\frac{р}{2})^{2}= -q+ \frac{р^{2}}{4}$ $\sqrt{(х+\frac{р}{2})^{2}}= \sqrt{-q+\frac{р^{2}}{4}}$ Х + $\frac{р}{2}= \pm \sqrt{\frac{р}{4}^{2}-q}$$$х\_{1}= -\frac{р}{2}+\sqrt{\frac{р}{4}^{2}-q};$$$х\_{2}= -\frac{р}{2}- \sqrt{\frac{р}{4}^{2}-q}$*.* |

Проверка найденных корней.

 $х\_{1}=5$ $х\_{2}=3$

 $х\_{1}^{2}-8х\_{1}+15=0$ $х\_{2}^{2}-8х\_{2 }$+ 15 = 0

$5^{2}-8∙5$ + 15 ? 0 $3^{2}-8∙3+15$ ? 0

$25-40+15 ?0 $ 9 – 24 +15 ? 0

$ 0=0$ 0 = 0.

$Образец. $ $х^{2}+5х-14=0.$

 Решение .

$х\_{1,2}= -\frac{5}{2}$ $\pm \sqrt{(\frac{5}{2})^{2}-(-14)}$

$х\_{1,2}= - \frac{5}{2 } \pm \sqrt{\frac{25}{4}+\frac{56}{4}} $

$х\_{1,2}= -\frac{5}{2}\pm \frac{9}{2}$

$х\_{1}= -\frac{5}{2}+\frac{9}{2}=2$

$х\_{2}= -\frac{5}{2}-\frac{9}{2}= -7$ .

3.Закрепление изученного №523-525

Домашнее задание №526,531.

***Урок №2***

***Тема. Частные случаи приведённого квадратного уравнения.***

***Урок – лекция.***

1. Если в квадратном уравнении равны нулю некоторые коэффициенты (при а $\ne $

0), то имеем частные случаи квадратного уравнения или так называемые неполные квадратные уравнения.

Существуют три частных случая приведённого квадратного уравнения $х^{2}+рх+q$ = 0:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 1 | р = 0, q $\ne $0 | $х^{2}+q$ *=* 0, $х^{2}= -q$ | $х\_{1,2}= \pm \sqrt{-q}$  |
| 2 | Р = 0, q = 0 | $х^{2}=0 $  | $х\_{1}= х\_{2}=0$  |
| 3 | Р $\ne $0, q = 0 | $х^{2}+рх=0, $х( х+р ) = 0 | $х\_{1}=0$, $х\_{2}$= -р |

Заметим, что если под знаком квадратного радикала получается отрицательное число, то уравнение не имеет решения.

Например: $х^{2}$+ 4 = 0,

 $х^{2}= -4,$

 Х = $\sqrt{-4}$.

1. Решить уравнения и проверить корни.
2. 3$х^{2}$- 27 = 0, в) 5$х^{2}$ – 20 = 0,

 3$х^{2}$+ 27 = 0; 45$х^{2}+20=0$;

 б) 3$х^{2}- \frac{1}{27}$ = 0; г) 23$х^{2}$ = 0,

 7,346$х^{2}=0.$

1. Теорема Виета.

Сумма корней приведённого квадратного уравнения $х^{2} $+ рх + q = 0 равна второму коэффициенту с противоположным знаком (-р), а произведение корней равно свободному члену (q).

Доказательство.

Составим квадратное уравнение вида (1), которое имеет корни $х\_{1} и х\_{2}$:

 $х^{2} $+ рх + q = 0. (1)

$ \left.\begin{array}{c}х- х\_{1}=0,\\х- х\_{2}=0.\end{array}\right⟧$

$ (х$− $х\_{1})(х-х\_{2})$ = 0,

$ х^{2}- х\_{1}х- х\_{2}х+ х\_{1}х\_{2} $ = 0,

$х^{2}-\left(х\_{1}+ х\_{2}\right)х+ х\_{1}х\_{2}=0,$ (2)

$х^{2}+рх+q=0$

Приравнивая соответствующие коэффициенты выведенного уравнения (2) и исходного уравнения (1), мы находим доказываемые соотношения (3) и (4):

Р = -($х\_{1}+ х\_{2}$), или $х\_{1}+ х\_{2}= -р,$ (3)

 $х\_{1}∙х\_{2}= $q. (4)

$Это и требовалось получить$.

$Теорема, обратная теореме Виета$.

$Если в квадратном уравнении \left(1\right) второй$ $х^{2} $+ рх + q = 0 (1)

$коэффициент \left(р\right)противоположен сумме $ Если

$некоторых двух чисел$ $х\_{1} и х\_{2, }$ а свободный р = - ($х\_{1}+ х\_{2}),$

$член \left(q\right)равен произведению тех же чисел,$q = $х\_{1}∙х\_{2},$

то числа $х\_{1} и х\_{2}$ являются корнями данного то $х\_{1} и х\_{2}$ являются

квадратного уравнения. корнями этого уравнения

доказательство .

Согласно условию теоремы напишем квадратное уравнение (2):

 $х^{2}-(х\_{1}+х\_{2)}х+ х\_{1}∙х\_{2}=0.$ (2)

$подставив х\_{1} вместо$ х в уравнение (2), получим тождество 0 = 0.

$В самом деле $

 $х\_{1}^{2}-\left(х\_{1}+х\_{2}\right)х\_{1}+ х\_{1}∙х\_{2} ? 0,$

$ х\_{1}^{2}-х\_{1}^{2}+х\_{1}∙х\_{2}-х\_{1}∙х\_{2}=0$ .

$Значит х\_{1}$ – корень уравнения (2).

$то же самоое будет при подстановке х\_{2} в \left(2\right): $

$ х\_{2}^{2}-\left(х\_{1}+ х\_{2}\right)х\_{2}+х\_{1}х\_{2}=0.$

$Следовательно, х\_{1} и х\_{2}-корни уравнения \left(2\right).$

$$4. Проверим двойную таблицу сумм и произведений однозначных положитель$$

$ных чисел. $

Составим квадратное уравнение с корнями, указанными в одной из клеток этой таблицы; например, в пересечении столбца $х\_{2}$ = 5 и строки $х\_{1}$ = 4 мы находим два числа. Это означает:

-(а+в) = -(4+5) = -9 = р, 4$∙$ 5 = 20 = q.

$$х\_{1}+х\_{2}= -р$$

$ х\_{1}∙$ $х\_{2}$ = q

|  |
| --- |
| $х^{2}-рх+q$ *=* 0 |
| $х\_{1}$ $х\_{2}$ | З3 | 55 | 77 | 99 |
|  2 | 56 | 710 | 914 | 1118 |
| 4 | 712 | 920 | 1128 | 1336 |
| 6 | 918 | 1130 | 1342 | 1554 |
| 8 | 1124 | 1340 | 1536 | 1742 |

$х^{2}-9х+20=0$ $→$ ($х\_{1}=4; х\_{2}=5)$

 $х^{2}-15х+54=0 $ $→$ ($х\_{1}=6; х\_{2}=9)$

$Итак, составим приведённое квадратное уравнение$ $х^{2}-9х+20=0$ ;

Домашнее задание а) решить составленное уравнение. Получились ли намеченные корни?

б) составить квадратное уравнение для любой другой клетки таблицы. Решить составленное уравнение.

***Урок №3. Составление уравнений, приводящих к квадратному.***

1. Проверка домашнего задания. В таблице даны параметры семи уравнений. Найти пропущенные числа, составив и решив соответствующие уравнения.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| $$х\_{1}$$ | 0,5 | $$\frac{3}{4}$$ | 0,2 | 0,3 | 2 | -3 |  |
| $$х\_{2}$$ | 4 | -8 | -0,7 | $$\frac{3}{5}$$ |  |  |  |
| р |  |  |  |  | 8 |  | 5 |
| q |  |  |  |  |  | 12 | 4 |

1. Пусть решено уравнение

(х - 3)(2х – 5 ) = 3 (1)

$х^{2}- 5,5х+6=0$

$х\_{1}=4, х\_{2}= \frac{3}{2} $

$Проверим корень х\_{1}=4$ (х-3)2х-5) = 3

$$ \left(4-3\right)\left(2∙4-5\right)?3$$

 1$∙3=3$

1. Решить уравнение Составить и решить похожее уравнение

$а) х^{2}-10х+21=0$ б)$5^{2}-10∙5- $ = 0

$$ 25-50+25=0,$$

$$ х^{2}-10х+25=0$$

 $х\_{1}=5, х\_{2}=$;

$в)2х^{2}+5х-52=0;$ г) 3$∙2^{2}-5∙2+$ = 0

$$ 12-10+=0$$

 12-10-2=0

 3$х^{2}-5х-2=0$

 $х\_{1}=2,$ $х\_{2}=.$

1. Решить уравнение

а) $\frac{5х+10}{3х-10}= \frac{2х-5}{15-х} $ б) проверить числовое равенство

 $\frac{6∙+12}{5∙-10}= \frac{+2}{-3}$

 Заменить всюду число 8 буквой х:

 $\frac{6∙х+12}{5∙х-10}=\frac{х+2}{х-3}$ .

$$ Решить полученное уравнение$$

 ($х\_{1}=8, х\_{2}=$).

1. а) решить уравнение б) проверить числовое равенство

$\frac{10}{2х+1}=3х-4$ $\frac{16}{3∙-1}=2∙-4$

$$ 2-6=-4$$

 $\frac{16}{3∙3-1}=2∙3-4$

$$ \frac{16}{3∙х-1}=2∙х-4$$

1. а) решить уравнение б) проверить равенство

$\frac{3х(2х-1)}{х-2}=3$ $\frac{(5+1)(15-2∙5)}{4∙5-10}=3$

$$ заменить всюду число5 буквой у. Решить$$

 составленное уравнение

 ($у\_{1}=5, у\_{2}=$

***Урок №4. Параметрические уравнения, приводящие к квадратному.***

Решим следующее квадратное уравнение:

$$х^{2}-8х-20=0,$$

$х\_{1,2}=4\pm \sqrt{16+20}$, $х\_{1}=10, х\_{2}=-2$.

$$Преобразуем решённое уравнение в уравнение с переменным вторым$$

$ коэффициентом$ (к):

$х^{2}+кх-20=0$ (1)

$х\_{1,2}=\frac{к}{2}\pm \sqrt{\frac{к^{2}}{4}+20,}$

$х\_{1}=\frac{к}{2}+\sqrt{\frac{к^{2}}{4}}+20.$

$Решим уравнения, получаемые$ при различных значениях коэффициента к. Корни уравнения будут различными.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Параметр к | Уравнение | $$х\_{1}$$ | $$х\_{2}$$ |
| -8 | $$х^{2}-8х-20=0$$ | 10 | -2 |
| 8 | $$х^{2}+8х-20=0$$ | -10 | 2 |
| 1 | $$х^{2}+х-20=0$$ | -5 | 4 |
| … | … | … | … |

В таких задачах переменную величину к называют параметром, а уравнение, содержащее такой параметр, называют параметрическим.

1. а) при каком значении параметра к квадратное уравнение (1) будет иметь корень, равный 4? Каков второй корень?

б) пусть параметром квадратного уравнения будет свободный член к. При каком значении параметра к квадратное уравнение $х^{2}-8х+к=0 $ будет иметь равные корни ($х\_{1}=х\_{2)}? $противоположные значения корней ($х\_{1}=-х\_{2})$ ? взаимно обратные корни ($х\_{1}=\frac{1}{х\_{2}})$ ? Найти указанные корни. Проверить ответы.

 2) а) требуется составить квадратное уравнение, такое, чтобы один корень был на 3 больше другого корня.

Решение. $\left.\begin{array}{c}х\_{1}=а,\\х\_{2} а+3.\end{array}\right]$ $\left.\begin{array}{c}х-а=0,\\х-\left(а+3\right)=0.\end{array}\right]$

Перемножим по частям линейные уравнения совокупности, получим

 (х-а)(х-а-3)=0.

 $х^{2}-\left(2а+3\right)х+а^{2}=3а=0.$ (1)

При любых значениях параметра а будем получать два корня, один из которых больше другого на 3. Проверка .

Пусть а=0, $х^{2}-3х=0$, $х\_{1}=0, х\_{2}=3 \left(х\_{2}-х\_{1}=3\right).$

Пусть а=1, $х^{2}-\left(2∙1+3\right)∙х+1^{2}+3∙1=0, х^{2}-5х+4=0,$

$х\_{1}=1, х\_{2}=4 \left(х\_{2}-х\_{1}=4-1-3\right).$

б) составить уравнение (1) при а=10. Решить составленное уравнение. Проверить : $х\_{2}-х\_{1}=3.$

3) составить и решить несколько квадратных уравнений, таких, чтобы второй корень был меньше первого на 2.

Решение

$\left.\begin{array}{c}х\_{1}=а,\\х\_{2}=а-2.\end{array}\right] \left.\begin{array}{c}х-а=0,\\х-а+2=0.\end{array}\right]$ (х-а)(х-а+2)=0

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| № | Уравнение  | $$х\_{1}$$ | $$х\_{2}$$ | Проверка ($х\_{2}-х\_{1}=2)$ |
| 1 |  | -1 | 1 | 1-(-1)=2 |
| 2 |  | 6 | 8 |  |
| 3 |  |  |  |  |

4)составить и решить такое квадратное уравнение, чтобы второй корень был равен первому корню, умноженному на 2.

$\left.\begin{array}{c}х\_{1}=а,\\х\_{2}=2а.\end{array}\right] $ $\left.\begin{array}{c}х-а=0,\\х-2а=0.\end{array} \right]$ (х-а)(х-2а)=0, $х^{2}-3ах+2а^{2}=0.$

Проверить утверждение задачи при а=3; 6.

5)составить и решить несколько квадратных уравнений, таких, чтобы второй корень был квадратом первого корня.

$\left.\begin{array}{c}х\_{1}=а,\\х\_{2}=а^{2.}\end{array}\right⟧$ ($х\_{2}-х\_{1})(х-х\_{2})=0,$ (х-а)(х-$а^{2})=х^{2}-\left(а^{2}+а\right)х+а^{3}=0.$

Проверить, выполняется ли условие задачи.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| № | Уравнение  | Корни  | Проверка($х\_{1}^{2}=х\_{2})$ |
| 1 | $$х^{2}-2х+1=0$$ | $$х\_{1}=1,х\_{2}=1$$ | $$1^{2}=1$$ |
| 2 |  | $$х\_{1}=3,х\_{2}=9$$ |  |
| 3 |  |  |  |
| 4 |  |  |  |

5 Тема. Золотое сечение. Число Фидия.

Пусть отрезок длиной в 1 единицу разделен на два отрезка длиной х и 1-х.

Заметим, что х+(1-х)=1.

Золотым сечением отрезка называется такое деление его на две неравные части, при котором отношение всего отрезка (1) к большей его части (х) равно отношению большей части (х) к меньшей части (1-х):

 А О В

 -----------------------------------

 х 1-х

АВ=1, АО= х, ОВ=1-х

$\frac{АВ}{АО}$=$\frac{АО}{ОВ}$

$\frac{1}{х}=\frac{х}{1-х}$ (1)

$1-х=х^{2}, $

$х^{2}+х-1=0$ .

$х\_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm \sqrt{\frac{1}{4}+1}. $

$х\_{1}=Ф=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}≈0,618 \left(число Фидия\right).$

$Фидий- $древнегреческий архитектор, построивший знаменитый храм Парфенон в Афинах.

$Рамы, книги, ящики$ , отношение размеров которых близко к корню уравнения х=Ф=0,618…, человеку кажутся удобными и красивыми. Почему это так, ещё не раскрыто учёными.

$Обратите внимание:$

$\frac{ширина}{высота}=\frac{высота}{длина}≈0,618…=Ф$

$\frac{62}{100}≈\frac{100}{162}≈0,618…=Ф$ .

$Подставив$ в (1) число Ф вместо переменной х:

$Ф^{2}=1-Ф$ поделим обе части на Ф:

 $\frac{Ф^{2}}{Ф}=\frac{1-Ф}{Ф}, Ф=\frac{1}{Ф}-1, 1=\frac{1}{Ф}-Ф$.

Возведём обе части последнего равенства в квадрат:

$1^{2}=(\frac{1}{Ф}-Ф)^{2},$

$1=\frac{1}{Ф^{2}}-2+Ф^{2} $ , откуда

$3=Ф^{2}+\frac{1}{Ф^{2}} $ (2)

Выразим 3 через степени иррационального числа Ф.

Ф=$\frac{\sqrt{5}-1}{2}=0,618…$

Получить уравнение $Ф^{4}+\frac{1}{ф^{4}}=7,$ возведя обе части (2) в квадрат.

Проверить это равенство на калькуляторе.

$$ $$